Développement : Disques de Gershgörin

Analyse & Probabilités
Algèbre & Géométrie

Référence : [ENS] Francinou S., Gianella H., Nicolas S., *Exercices de mathématiques - Oraux X-ENS - Algèbre 2*, Cassini, 2009, p80.

Pour les leçons :
- 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 149 : Déterminant. Exemples et applications.
- 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.
- 204 : Connexité. Exemples d'applications.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose, pour $i \in [\![1;n]\!]$, $R_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Lemme 1. *Lemme d'*Hadamard.

Si A est à diagonale strictement dominante, i.e. pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Preuve : Raisonnons par contraposée : supposons que $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $AX = 0$.
Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a donc $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0$. Mais alors :

$$\begin{aligned} |a_{i,i}x_i| &= \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\ &\leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}x_j| \\ &\leqslant R_i\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

On choisit $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \|x\|_\infty$. Alors, $|a_{i_0,i_0}|\|x\|_\infty \leqslant R_{i_0}\|x\|_\infty$.
Comme $x \neq 0$, $|a_{i_0,i_0}| \leqslant R_{i_0}$.
On a montré qu'il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|a_{i_0,i_0}| \leqslant R_{i_0}$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 2. *Disques de* Gershgörin.

On a :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant R_i\}.$$

Preuve : Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On sait alors que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
D'après le lemme précédent, il existe donc $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|a_{i_0,i_0} - \lambda| \leqslant R_{i_0}$, c'est-à-dire :

$$\lambda \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i_0,i_0}| \leqslant R_{i_0}\}.$$

□

Théorème 3.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est à diagonale strictement dominante, alors :

$$\det(A) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (|a_{i,i}| - R_i).$$

PREUVE : Raisonnons par étapes.
⋆ ÉTAPE 1 : On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que si, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$, alors :

$$|\det(A)| \geqslant \prod_{i=1}^{n} ||a_{i,i}| - R_i|.$$

Soit A' la matrice obtenue à partie de A en multipliant, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la i-ième ligne par $\dfrac{1}{|a_{i,i}| - R_i}$. Le dénominateur est bien non nul, car pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$.
Ainsi :

$$\det(A) = \det(A')\prod_{i=1}^{n}(|a_{i,i}| - R_i). \tag{1}$$

On écrit $A' = (a'_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} |a'_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a'_{i,j}| &= \frac{|a_{i,i}|}{||a_{i,i}| - R_i|} - \frac{R_i}{||a_{i,i}| - R_i|} \\ &= \frac{|a_{i,i}| - R_i}{||a_{i,i}| - R_i|} \\ &= \frac{|a_{i,i}| - R_i}{|a_{i,i}| - R_i} \\ &= 1, \end{aligned}$$

puisqu'on a supposé que $|a_{i,i}| > R_i$.
On applique le lemme précédent à la matrice A', on notant $R'_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a'_{i,j}|$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$: pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A')$, il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $|a'_{i,i} - \lambda| = |\lambda - a'_{i,i}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a'_{i,j}|$. Il vient, par inégalité triangulaire :

$$|a'_{i,i}| - |\lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a'_{i,j}|,$$

et donc :

$$|\lambda| - |a'_{i,i}| \geqslant -\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a'_{i,j}|,$$

ce qui amène à :

$$|\lambda| \geqslant |a'_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a'_{i,j}| = 1,$$

d'après le travail précédent. Toute valeur propre de A' est donc de module plus grand que 1. Or :

$$\det(A') = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A')} \lambda^{m_\lambda(A')},$$

où $m_\lambda(A')$ est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A'. Donc $|\det(A')| \geqslant 1$, ce qui donne le résultat de l'ÉTAPE 1 d'après (1).
⋆ ÉTAPE 2 : Concluons. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. D'après l'ÉTAPE 1 :

$$|\det(A)| \geqslant \prod_{i=1}^{n} ||a_{i,i}| - R_i|.$$

Soit $\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall i \in [\![1;n]\!] \quad m_{i,i} > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}| \right\}$. Montrons que $\mathcal{C}$ est convexe.
Soient $M, N \in \mathcal{C}$ et $t \in]0;1[$. On a, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |tm_{i,j} + (1-t)n_{i,j}| &\leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (t|m_{i,j}| + (1-t)|n_{i,j}|) \\ &\leqslant t\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}| + (1-t)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} n_{i,j} \\ &< tm_{i,i} + (1-t)n_{i,i}. \end{aligned}$$

D'où le fait que $\mathcal{C}$ est convexe. Il est ainsi connexe.
Or, det : $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est continue (car polynomiale en les coefficients de la matrice), et d'après le lemme d'HADAMARD, det ne s'annule pas sur $\mathcal{C}$.
Son image est donc un connexe de $\mathbb{R}$, i.e. un intervalle I de $\mathbb{R}$, ne contenant pas 0. Autrement dit, $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$.
Comme $I_n \in \mathcal{C}$, et que $\det(I_n) = 1 > 0$, on en déduit que $I \subset \mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\det(M) > 0$.
Enfin, par hypothèse, $A \in \mathcal{C}$. Donc $\det(A) > 0$.
Cela achève la preuve. □

Remarques 4. ***Localisation de valeurs propres.***

- Le résultat démontré dans le deuxième lemme peut être appliqué à une matrice compagnon d'un polynôme pour avoir des informations sur la localisation de ses racines.
Cela peut être très intéressant dans la mesure où le calcul des valeurs propres (i.e. des racines d'un polynôme) peut parfois être très difficile numériquement.

- Les disques de GERSHGÖRIN sont les disques décrits dans la réunion du lemme 2.